Gie 11/2000

Fehlerrechnung

1. Physikalische Größen: Zahlenwert und Einheit
2. Ursachen von Meßfehlern
3. Genauigkeit von Meßergebnissen am Beispiel der Längenmessung
4. Messung einer konstanten Größe und Mittelwert
5. Messung einer Größe, die eine lineare Funktion einer anderen ist (Ausgleichsgerade)
6. Verteilung der Einzelwerte bei Messung einer konstanten Größe
7. Fehlerfortpflanzung

Messung, Meßergebnis und Fehlerrechnung

1. Physikalische Größen

Das Ergebnis jeder physikalischen Messung ist die Angabe einer physikalischen Größe G, die ein quantitatives Merkmal eines Körpers oder Vorgangs beschreibt. Sie ist das Produkt aus einem Zahlenwert $\{G\}$ und einer Einheit [G], also: $G = \{G\} \cdot [G]$
Einheiten sind vereinbarte Vertreter der betreffenden Größenart, von denen es oft mehrere gibt; Einheiten der Größenart "Länge" sind z.B. 1 mm, 1 cm, 1 m. Zwar ändert sich beim Übergang von einer Einheit zu einer anderen der Zahlenwert, die physikalische Größe ist aber eine von der Einheitenwahl unabhängige Größe, z.B. bezeichnen s=1,50 m und s=150 cm dieselbe Länge.

2. Ursachen von Meßfehlern

a. *Systematische Fehler*
Sie entstehen hauptsächlich durch fehlerhafte Eichungen. So können z. B. alle Skalenteile eines Maßstabes zu groß oder zu klein oder verschieden groß sein.

b. *Statistische (zufällige) Fehler*
Eine ihrer wesentlichen Ursachen liegt in der Person des Beobachters: in dem begrenzten Unterscheidungsvermögen seines Auges bei Ablesungen und in den Grenzen der Geschicklichkeit seiner Hand, z.B. beim Anlegen des Maßstabsanfangs an den Streckenanfang. Daher wird eine mehrfach wiederholte Messung nicht immer genau das gleiche Ergebnis liefern.

3. Angabe von Meßergebnissen

Merke: Im Ergebnis einer einzelnen Messung gibt man nur die mit dem benutzten Meßgerät *tatsächlich gesicherten* Ziffern an ("geltende" Ziffern).

	Zollstock	*Schieblehre*	*Mikrometer-schraube*
Meßbereich	0 ... 2 m	0 ... 20 cm	0 ... 2 cm
kleinste meßbare Länge	1 mm	0,1 mm	0,01 mm
Beispiel	911 mm 91,1 cm 0,911 m	51,3 mm 5,13 cm 0,0513 m	13,45 mm 1,345 cm 0,01345 m
Anzahl der geltenden Ziffern	**3**	**3**	**4**

Beachte:

- Mit einem Zollstock wurde s=**72** mm gemessen; gleichbedeutend damit sind die Angaben s=**7**,**2** cm, s=0,0**72** m und s=0,000**72** km, da sie ebenfalls 2 geltende Ziffern enthalten, die "führenden" Nullen (unterstrichen) sind keine geltenden Ziffern !
Die Angaben s=72,0 mm oder s=7,20 cm sind irreführend: sie täuschen vor, es seien auch noch die $\frac{1}{10}$ mm gemessen und eine 0 gefunden worden; dies wäre aber nur mit einer Schieblehre möglich gewesen.
- Die Meßergebnisse s=7,2 cm und s=7,20 cm haben also eine verschiedene Bedeutung !
- Bei Messungen im Schulunterricht sind kaum mehr als 3 geltende Ziffern möglich !

4. Messung einer konstanten Größe und Mittelwert

Es sei W der "wahre" Wert einer physikalischen Größe, d.h. ihr absolut exakter Wert. Er läßt sich grundsätzlich niemals messen !

Wiederholte Messungen liefern die Einzelwerte:

$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_{n-1}, s_n$ (n = Anzahl der Messungen).

Jede dieser Einzelmessungen s_i ist mit einen Meßfehler behaftet.

Definition 1:
Der wahre Fehler einer Einzelmessung s_i ist deren Abweichung vom wahren Wert W:

$$w_i = W - s_i$$

Der wahre Fehler ist wie der wahre Wert nicht bestimmbar. Ziel der Messung kann daher nur sein, einen Wert L zu bestimmen, der dem wahren Wert möglichst nahe kommt: man nennt ihn den "besten", "plausiblen" oder "wahrscheinlichen" Wert der Größe.

Definition 2:
Der scheinbare Fehler einer Einzelmessung s_i ist die Abweichung vom besten Wert L:

$$v_i = L - s_i$$

Die folgenden Überlegungen beschäftigen sich mit der sinnvollen Festlegung des Bestwertes.

Beispiel:

Gegeben seien die 4 Meßwerte:

s_1, s_2, s_3, s_4

Für den besten Wert L nehmen wir willkürlich vier Werte an.

a. Berechne für jedes L_i die scheinbaren Fehler v_i.

b. Berechne deren Summen $\sum_{i=1}^{4} v_i$

s_i	L_1=21,4	L_2=21,9	L_3=21,8	L_4=21,7
21,4				
21,9				
21,8				
21,7				
$\Sigma\, v_i$ =				

Feststellung: Es gibt ein L mit Sonderstellung, das sich daher als Bestwert eignet.

Axiom 1: Der Bestwert L der Größe ist derjenige Wert, für den $\Sigma\, v_i = 0$ gilt.

Wie berechnet man den Bestwert allgemein ?

$$\begin{aligned} s_1 &+ v_1 = L \\ s_2 &+ v_2 = L \\ &\vdots \\ s_n &+ v_n = L \end{aligned}$$

Addition: $\Sigma\, s_i + \Sigma\, v_i = nL$ $\qquad L = \frac{\Sigma\, s_i}{n} + \frac{\Sigma\, v_i}{n}$ $\qquad \mathbf{L = \frac{\Sigma\, s_i}{n}}$ (da $\Sigma\, v_i = 0$)

Merke: Die Forderung $\Sigma\, v_i=0$ ergibt als Bestwert den *arithmetische Mittelwert* der Einzelwerte s_i. Man nennt ihn meist einfach "Mittelwert" und schreibt $\bar{s} = \frac{\Sigma\, s_i}{n}$

5. Messung einer Größe, die eine lineare Funktion einer anderen ist (Ausgleichsgerade)

gegeben: $(t_1| s_1)$, $(t_2| s_2)$ ...., $(t_n| s_n)$ (n Messungen)

gesucht: Steigung a und Abschnitt b der Geraden $s = a\,t + b$

Beispiel: Zeichne in ein Koordinatensystem (t nach rechts, s nach oben):

t	3	3	7	7
s	1	3	5	7

a. Bestimmung des Schwerpunktes der Meßpunkte

$s_i + v_i = a\,t_i + b = f(t_i)$

$$\begin{aligned} 1 + v_1 &= 3a + b \\ 3 + v_2 &= 3a + b \\ 5 + v_3 &= 7a + b \\ 7 + v_4 &= 7a + b \\ \hline 16 + \Sigma v_i &= 20a + 4b \quad |:4 \\ 4 &= 5a + b \end{aligned}$$

Schwerpunkt S(5|4)

allgemein:

$$\begin{aligned} s_1 + v_1 &= a\,t_1 + b \\ s_2 + v_2 &= a\,t_2 + b \\ &\vdots \\ s_n + v_n &= a\,t_n + b \\ \hline \Sigma s_i + \Sigma v_i &= a\Sigma t_i + nb \quad |:n \\ s_0 &= a\,t_0 + b \end{aligned}$$

$S(t_0 | s_0)$ mit $s_0 = \frac{\Sigma s_i}{n}$ und $t_0 = \frac{\Sigma t_i}{n}$

Der Schwerpunkt S muß auf der gesuchten Geraden liegen.

b. Bestimmung der Steigung a

Die Koordinaten-Transformation $x = t - 5$ und $y = s - 4$ verlegt S in den Ursprung. Wir legen verschiedene Ursprungsgeraden $y = ax$ mit (willkürlich gewählten Steigungen a) durch die Meßpunkte und suchen die "beste" Gerade:

t	s	x	y	$v_i = ax_i - y_i$	v_i a=0	v_i a=0,5	v_i a=1	v_i a=1,5	v_i a=2	$v_i^2 = (ax_i - y_i)^2$
3	1	-2	-3	-2a + 3	3	2				$4a^2 - 12a + 9$
3	3									
7	5									
7	7									
				Σv_i						
				$\Sigma \lvert v_i \rvert$						
				Σv_i^2						

1. Für welche der Summen Σv_i, $\Sigma |v_i|$, Σv_i^2 gibt es ein a mit Sonderstellung ?
2. $Q(a) = \Sigma v_i^2$ ist eine Parabel; bestimme die Scheitelpunktsform ihrer Gleichung: $Q(a) = A\,(a-a_0)^2 + B$; bei welchem a_0 hat sie ihr Minimum ?
3. Berechne den Achsenabschnitt b und zeichne die gefundene "Ausgleichsgerade" in das s-t-Diagramm ein.

Axiom 2: Die Steigung der gesuchten Funktionsgeraden erhält man für: Σv_i^2 = Minimum,

Merke:	Als Ausgleichsgerade wählt man diejenige, für die Σv_i^2 minimal ist (Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

6. Verteilung der Einzelwerte bei Messung einer konstanten Größe

Beispiel:

Die Dauer x eines Vorgangs wird mit einer mechanischen Stoppuhr (Genauigkeit 0,1 s) 50 mal gemessen:

x_i	v_i^2	x_i	v_i^2	x_i	v_i^2	x_i	v_i^2	x_i	v_i^2
9,7		10,1		10,0		10,2		9,9	
10,2		10,0		10,3		10,0		9,7	
9,9		9,8		10,1		10,0		10,1	
10,0		9,9		9,9		10,5		10,0	
9,8		10,2		10,2		10,1		9,8	
10,1		10,0		9,7		9,9		10,2	
9,6		9,5		10,0		10,4		10,0	
10,0		9,9		9,6		10,1		10,3	
10,4		10,3		9,8		9,8		9,9	
10,1		10,0		9,9		10,0		10,1	

a. Berechne den Mittelwert $\overline{x}$.

b. Schreibe für jeden Meßwert x_i die Größe $v_i^2 = (x_i - \overline{x})^2$ in die Tabelle.

Merke: Unter der *Standardabweichung* σ *der Einzelwerte* versteht man:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\ v_i^2}{n - 1}} \qquad \text{(n=Anzahl der Messungen)}$$

c. Berechne σ und die relative prozentuale Standardabweichung $(\sigma / \overline{x}) \cdot 100\ \%$.

d. Bestimme die Anzahl N(x) der Meßwerte x und trage N(x) gegen x in einem Diagramm auf:

x	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5
N(x)											

e. Wieviel Prozent der Einzelwerte x_i liegen im Intervall

1. $\overline{x} - \sigma$ bis $\overline{x} + \sigma$? 2. $\overline{x} - 2\sigma$ bis $\overline{x} + 2\sigma$? 3. $\overline{x} - 3\sigma$ bis $\overline{x} + 3\sigma$?

Merke: Unter dem *Fehler* $\Delta\overline{x}$ *des Mittelwertes* versteht man die Größe

$$\Delta\overline{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma\ v_i^2}{n\ (n-1)}}$$

Der Mittelwert von jeweils n Messungen liegt mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall

$[\overline{x} - \Delta\overline{x}\ ;\ \overline{x} + \Delta\overline{x}]$.

Merke: Man gibt das Ergebnis einer Messung zusammen mit dem absoluten Fehler $\Delta\overline{x}$ und dem relativen prozentualen Fehler an in der Form:

$$x = (\overline{x} \pm \Delta\overline{x})\ , \qquad (\Delta\overline{x} / \overline{x}) \cdot 100\% = ...$$

7. Fehlerfortpflanzung

Bei den meisten Auswertungen ermittelt man ein Resultat, das aus einer oder mehreren unmittelbar gemessenen Größen berechnet wird.

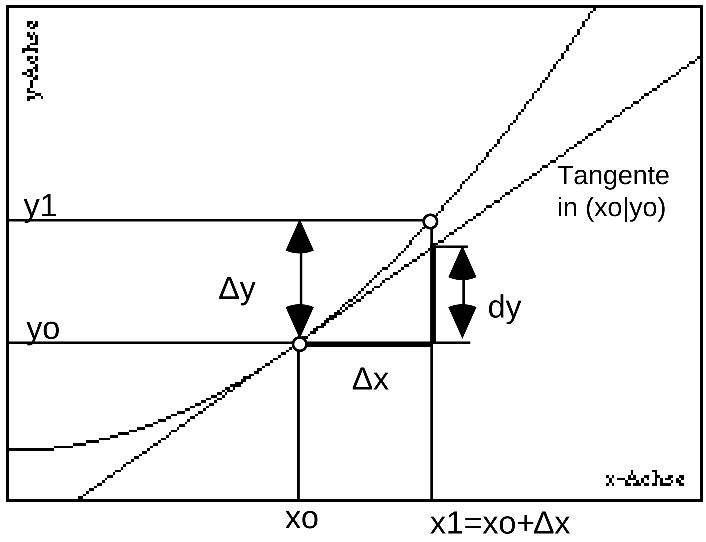
Beispiel 1:

Die Kantenlänge eines Quadrats wird mit a_o=5,0 cm und a_1=5,1 cm gemessen.
a. Um wieviel Prozent weicht a_1 von a_o ab ?
b. Um wieviel Prozent weicht der mit a_1 berechnete Flächeninhalt A_1 von dem mit a_o berechneten Flächeninhalt A_o ab ?

Beispiel 2:

Die Kantenlänge eines Würfels wird mit a_o=5,0 cm und a_1=5,1 cm gemessen.
a. Um wieviel Prozent weicht a_1 von a_o ab ?
b. Um wieviel Prozent weicht das mit a_1 berechnete Volumen V_1 von dem mit a_o berechneten V_o ab ?

Allgemein:



Das Resultat y berechne sich aus dem Meßwert x gemäß
$y = f(x) = a\,x^n$ (a konstant).
Die Meßwertes seien x_0 und $x_1=x_0 + \Delta x$

<u>Wie groß ist die (relative) Abweichung zwischen den Resultaten $y_0=f(x_0)$ und $y_1=f(x_1)$?</u>

Die Steigung des Graphen an der Stelle x_0 sei $m=f'(x_0)$
Dann gilt (siehe Steigungsdreieck):

$m = \frac{dy}{\Delta x}$ $\quad dy = m\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot\Delta x$

<u>Falls Δx klein ist</u>, gilt $\Delta y \approx dy$ $\quad \Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x = nax_0^{n-1}\cdot\Delta x$ $\quad \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{n\,a\,x_0^{n-1}}{a\,x_0^n}\,\Delta x = n\frac{\Delta x}{x_0}$

> Merke: Ist das Resultat y eine Potenzfunktion des Meßwertes x, also $y=ax^n$, so ist der relative Fehler des Resultats *n-mal* so groß wie der relative Fehler des Meßwertes: $\frac{\Delta y}{y} = |n|\,\frac{\Delta x}{x}$

<u>Verallgemeinerung:</u>

Ist das Resultat y ein Produkt <u>mehrerer Potenzen</u>, z.B. $y = a\,x^m\,z^n$, so addieren sich die Einzelfehler im ungünstigen Fall:

$$\frac{\Delta y}{y} = |m|\,\frac{\Delta x}{x} + |n|\,\frac{\Delta z}{z}$$ (relativer Größtfehler)

Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gleichen sich die Fehler gegenseitig aus, und es gilt das <u>Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:</u>

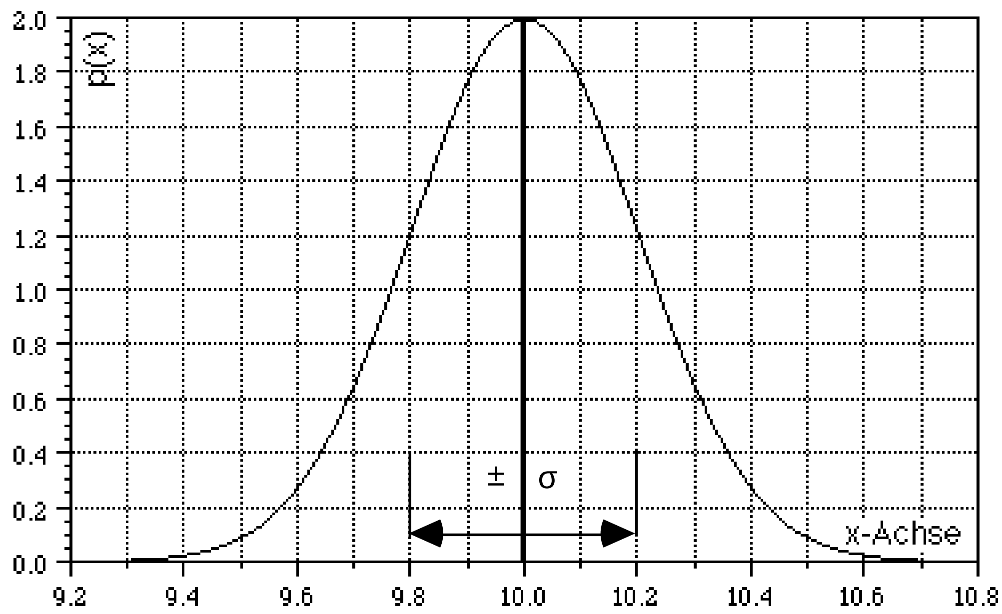
> <u>Merke:</u> $\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(m\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(n\frac{\Delta z}{z}\right)^2} = F$ (mittlerer relativer Fehler des Resultats)
>
> $\Delta y = F \cdot y$ (mittlerer absoluter Fehler des Resultats)
>
> <u>Faustregel:</u> *Das Resultat hat höchstens so viele geltende Ziffern wie die ungenaueste der eingehenden Größen.*

Ergänzung zu 6:

Die Verteilung der Einzelwerte wird durch die Gaußsche Fehlerfunktion beschrieben:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

Beispiel: $\sigma = 0{,}2$ und $\bar{x}=10$



x	f(x)
9.2000	0.0007
9.3000	0.0044
9.4000	0.0222
9.5000	0.0876
9.6000	0.2700
9.7000	0.6476
9.8000	1.2099
9.9000	1.7603
10.0000	1.9947
10.1000	1.7603
10.2000	1.2099
10.3000	0.6476
10.4000	0.2700
10.5000	0.0876
10.6000	0.0222
10.7000	0.0044
10.8000	0.0007

Für die Wahrscheinleichkeit , einen Wert aus dem Intervall $[x, x+\Delta x]$ zu messen, gilt $w(x) = f(x)\cdot\Delta x$.

> Merke: Im Intervall $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ liegen 68,3 % aller Einzelwerte,
>
> im Intervall $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ liegen 95,4 % aller Einzelwerte,
>
> im Intervall $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ liegen 99,7 % aller Einzelwerte

Aufgabe zu 6:

Es gelte für das Resultat: $y = \frac{3\ x^2\ \sqrt{z}}{100}$ und folgende Meßreihen für x und y liegen vor:

x	35,7	35,8	35,5	35,6	35,6	35,9	35,5	35,4	35,7	35,7
v_i^2										

z	2,42	2,41	2,40	2,38	2,40	2,42	2,39	2,38	2,37	2,43
v_i^2										

1. Berechne die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{z}$ und damit das Resultat y.
2. Berechne die Standardabweichungen σ_x und σ_z.
3. Berechne die Fehler der Mittelwerte $\Delta\bar{x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ und $\Delta\bar{z} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}$
4. Schreibe die Ergebnisse $x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x}$ und $z = \bar{z} \pm \Delta\bar{z}$ mit passender Stellenzahl.
5. Berechne die relat. proz. Fehler der Mittelwerte $(\Delta\bar{x} / \bar{x})\cdot 100\%$ und $(\Delta\bar{z} / \bar{z})\cdot 100\%$

6. Berechne den mittleren relativen und absoluten Fehler des Resultats y und schreibe mit passender Stellenzahl in der Form:

$$y = y \pm \Delta y, \qquad (\Delta y / y)100\% = \dots .$$

Schriftliche Übung zur Fehlerrechnung

Aufgabe 1:

Die beiden Diagramme zeigen dieselben Meßpunkte mit zwei verschiedenen Ausgleichsgeraden. Untersuche durch Rechnung, welche der beiden Geraden die Bedingung für die Ausgleichsgereade besser erfüllt.

Aufgabe 2.

a. Gib die Formel für die Standardabweichung σ der Einzelwerte an

b. Wie lautet die Formel für den Fehler des Mittelwertes $\Delta \overline{x}$? ....

x	v_i^2

y	v_i^2

b. Berechne die Mittelwerte und die Fehler der Mittelwerte:

$x = \overline{x} \pm \Delta \overline{x} =$ ....

$x = \overline{x} \pm \Delta \overline{y} =$ ....