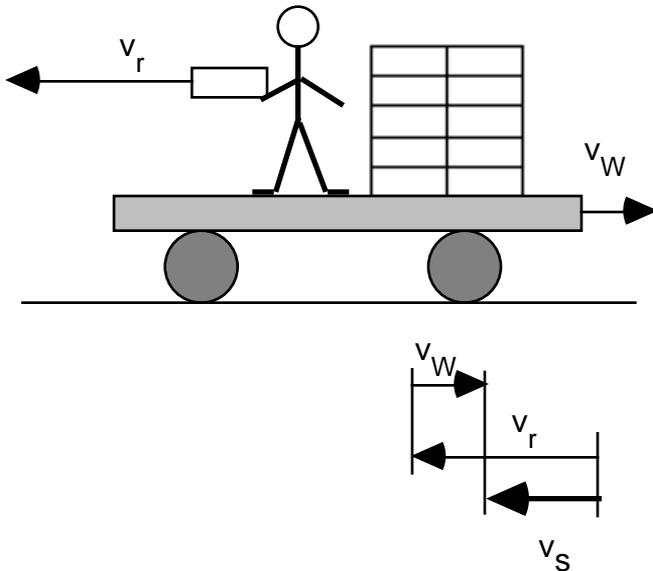


Raketenwagen

Aufgabenstellung:

Auf einem Wagen befinden sich eine Person und eine Anzahl von Ziegelsteinen. Wirft der Fahrer nacheinander Steine nach hinten vom Wagen, bewegt er sich der schneller werdend vorwärts.

- Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Wagens nach Abwurf aller Steine ?
- Hängt sie davon ab, ob die Steine einzeln oder mehrere zugleich geworfen werden ?
- Wie erreicht man eine möglichst große Endgeschwindigkeit ?
- Welche technische Anwendung steht dahinter ?



Bezeichnungen und Vereinbarungen:

Wagen, Person und Steine haben zusammen die Masse M .

Die Steine (Anzahl n) haben insgesamt die Masse m , ein einzelner Stein also die Masse $\frac{m}{n}$.

Die Steine werden immer mit derselben Geschwindigkeit v_r relativ zum Wagen abgeworfen.

Im ruhenden Bezugssystem habe

- der Wagen die Geschwindigkeit v_W (nach rechts, positiv)
- der Stein die Geschwindigkeit v_s (nach links, negativ).

Es gilt dann:

$$v_s = v_r + v_W$$

Rechne zunächst stets allgemein und setze dann $M=200$ kg, $m=100$ kg und $v_r = -10 \frac{m}{s}$

1. Abwurf aller Steine gleichzeitig

Schreibe den Impulssatz für das ruhende Koordinatensystem auf (v_s, v_W); ersetze dann v_s durch $v_r + v_W$ und berechne daraus die Geschwindigkeit des Wagen v_W .

Ergebnis: $v_W = -\frac{m}{M} v_r$

2. Abwurf der Steine in 2 Portionen ($n=2$)

- Der erste Abwurf der Masse $\frac{m}{2}$ vom ruhenden Wagen liefert (wie oben) seine Geschwindigkeit $v_{W,1}$
- Der zweite Abwurf der Masse $\frac{m}{2}$ erfolgt vom sich schon mit $v_{W,1}$ bewegenden Wagen; die Steine des ersten Abwurfs bleiben jetzt unberücksichtigt. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit $v_{W,2}$ des Wagens? Beachte: $v_s = v_r + v_{W,2}$. Schreibe das Ergebnis in der Form $v_{W,2} = v_{W,1} + \dots$

3. Abwurf der Steine in 3 Portionen ($n=3$)

Berechne entsprechend $v_{W,1}$, $v_{W,2}$ und die Endgeschwindigkeit $v_{W,3}$.

4. Abwurf der Steine in n Portionen

- Die Ergebnisse lassen die allgemeine rekursive Formel vermuten: $v_{W,n} = v_{W,n-1} + \dots$
- Wandle die rekursive Formel für $v_{W,n}$ in eine explizite Form um.
- Untersuche die Grenzgeschwindigkeit $v_{W,n}$ für n

5. Wie sind M und m zu wählen, damit die Grenzgeschwindigkeit möglichst groß wird ?